МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико – математический факультет
Кафедра вычислительной математики

И. О. Арушанян

Избранные задачи для семинарских занятий по численным методам решения нелинейных уравнений

Учебное пособие

Москва, 2020

Данное учебное пособие содержит методические материалы для проведения семинарских занятий по численным методам решения нелинейных уравнений на четвертом курсе механико-математического факультета МГУ.

1. Предварительные замечания

Пусть требуется найти единственный на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$ в предположении непрерывности функции $f(x)$.

Если в окрестности корня $\bar{x}$ функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = (x - \bar{x})^p g(x),$$

где p — натуральное число, а $g(x)$ — ограниченная функция, такая, что $g(\bar{x}) \neq 0$, то p называют кратностью корня. Если $p = 1$, то корень $\bar{x}$ называется *простым.* При нечетном p функция $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$, т.е. $f(a)f(b) < 0$, а при четном p — нет.

Исходное уравнение можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x).$$

Эту замену можно сделать, положив, например,

$$\varphi(x) = x + g(x)f(x),$$

где $g(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a, b]$ несколько корней, то выполняют операцию *отделения* (локализации) корней, т.е. находят такие подотрезки отрезка $[a, b]$, каждый из которых содержит единственный корень данного уравнения. Для выполнения этой операции используют *табличный* или *графический* способы.

Различают *прямые* и *итерационные* методы решения нелинейных уравнений. Прямые методы позволяют найти все корни уравнения за конечное число операций (например, известные формулы решения квадратных уравнений).

Итерационный метод решения генерирует последовательность приближений $\{x_n\}$, которая сходится к корню в том смысле, что $\lim_{n\to\infty} |x_n - \bar{x}| = 0$. Если для вычисления x_{n+1} используется только одно ранее вычисленное приближение x_n, то такой метод называют *одноточечным* (одношаговым), или методом *простой итерации.* В противном случае метод называется *многоточечным* (многошаговым).

Если два последовательных приближения x_{n+1} и x_n на каждом шаге итераций располагаются по разные стороны от корня, то метод называют *двусторонним*, а если по одну сторону — *односторонним.*

Пусть ε — абсолютная точность, с которой требуется найти корень. Тогда критерием окончания счета по двустороннему методу является выполнение неравенства $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Для односторонних методов в качестве такого критерия можно принять одновременное выполнение неравенств $\big|f(x_{n+1})\big| < \varepsilon$ и $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Заметим, что при применении односторонних методов чаще используется относительная точность.

Скорость сходимости. Итерационный метод имеет *порядок* m (или *скорость сходимости* m), если m есть наибольшее положительное число, для которого существует такая конечная постоянная $q > 0$, что

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q\,|x_n - \bar{x}|^m.$$

Величину $x_n - \bar{x}$ называют *абсолютной ошибкой* на текущем шаге итераций. Постоянную q называют *константой асимптотической ошибки*, причем эта постоянная обычно оценивается через производные функции $f(x)$ в точке $x = \bar{x}$.

Если $m = 1$ и $q \in (0, 1)$, то метод имеет *линейную* скорость сходимости (иногда говорят, что в этом случае метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q).

Если имеет место оценка

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q_{n+1}|x_n - \bar{x}|, \quad q_n \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

то метод имеет *сверхлинейную* скорость сходимости. О сверхлинейной скорости говорят и в случае, когда $1 < m < 2$.

Если $m = 2$ (при этом ограничения на q не формулируются), то скорость сходимости называют *квадратичной*. При бо́льших значениях m соответствующие методы называют итерационными методами *высших порядков*. Чем больше m, тем более жесткими становятся условия, обеспечивающие сходимость метода.

Метод бисекций. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Обозначим $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Тогда последовательность приближений

$$x_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\,(b_n - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_{n+1}], & \text{если } \ f(a_n)f(x_{n+1}) < 0, \\ [x_{n+1}, b_n], & \text{если } \ f(x_{n+1})f(b_n) < 0, \end{cases}$$

гарантированно (но не монотонно) сходится к корню уравнения $f(x) = 0$ для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ (естественно, выписанный процесс прерывается, если $f(x_{n+1}) = 0$; тогда полагают $x_{n+1} = \bar{x}$). Данный метод называют еще методом деления отрезка пополам, методом половинного деления, методом дихотомии или методом вилки.

Поскольку метод бисекций является двусторонним, критерием окончания счета является выполнение неравенства $|x_{n+1} - \bar{x}| \le |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где ε — заданная абсолютная точность. Отсюда следует, что примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$\frac{b-a}{2^N} \le \varepsilon \quad \text{или} \quad N \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}, \quad \text{или} \quad N \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Метод простой итерации. Пусть исходное уравнение $f(x) = 0$ заменено эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$. Выберем некоторое нулевое приближение к корню $x_0 \in [a, b]$, а дальнейшие приближения будем вычислять по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

Последовательность x_n стремится к пределу, являющемуся корнем исходного уравнения, когда отображение $y = \varphi(x)$ является *сжимающим* $\big($для этого достаточным является выполнение условия $\big|\varphi'(x)\big| < 1$ всюду на $[a, b]\big)$. Очевидно, что чем меньше $\big|\varphi'(x)\big|$, тем быстрее сходимость. Вблизи корня асимптотическая сходимость определяется величиной $\big|\varphi'(\bar{x})\big|$ и будет особенно быстрой при $\big|\varphi'(\bar{x})\big| = 0$.

Если на $[a, b]$ выполнено неравенство $0 < \varphi'(x) < 1$, то сходимость к корню монотонная и односторонняя. Если же $-1 < \varphi'(x) < 0$, то сходимость двусторонняя.

Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \ge \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \Big/ \left(\ln \frac{1}{q}\right),$$

где константа q берется из неравенства $\big|\varphi'(x)\big| \le q < 1$.

Метод Ньютона. Расчетная формула метода Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод состоит в замене дуги кривой $y = f(x)$ на касательную к ней в процессе каждой итерации. Это видно из уравнения касательной, проведенной в точке $\big(x_n, f(x_n)\big)$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

из которого расчетная формула итерационного процесса следует, если положить $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

В методе Ньютона (его еще называют методом Ньютона–Рафсона) сходимость монотонная и односторонняя. Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \geq \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Метод секущих. Пусть x_{n-1} и x_n — два последовательных приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ прямой, проходящей через точки $\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big)$ и $\big(x_n, f(x_n)\big)$. В качестве следующего приближения к корню возьмем точку пересечения этой прямой с осью абсцисс. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n).$$

Метод секущих получается из метода Ньютона, если $f'(x)$ аппроксимируется разностью назад. Этот метод является двухточечным, его сходимость монотонная и односторонняя. Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \geq 1.44 \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Метод хорд. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Сущность метода (его еще называют методом *ложного положения*) состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Метод хорд требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца x_0 выбирают тот конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}\,(x_n - x_0).$$

Метод хорд, как и метод секущих, является двухточечным, его сходимость монотонная и односторонняя.

Комбинированный метод. Последовательно применяя методы Ньютона и хорд, получим следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(\tilde{x}_n) - f(x_0)}\,(\tilde{x}_n - x_0). \end{aligned}$$

Комбинированный метод является двухточечным и двусторонним.

Методы высоких порядков сходимости. Если в методе простых итераций $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ функция $\varphi(x)$ выбрана так, чтобы выполнялось

$$\varphi'(\bar{x}) = \varphi''(\bar{x}) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(\bar{x}) = 0, \quad \varphi^{(m)}(\bar{x}) \neq 0,$$

то в результате получим метод, порядок сходимости которого равняется m. Часто такой метод называют стационарным процессом m-го порядка. Скорость его сходимости вблизи корня определяется следующим равенством:

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \frac{1}{m!}\,(x_n - \bar{x})^m \varphi^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_n, \bar{x}).$$

Недостаток методов высоких порядков сходимости состоит в том, что чем больше значение m, тем меньше область гарантированной сходимости, а сама скорость сходимости реально достигается лишь в узкой окрестности корня.

Более подробное изложение рассмотренных методов и их геометрическая интерпретация приведены в материалах по студенческому вычислительному практикуму по численному решению нелинейных уравнений (см. раздел “Учебные пособия” по адресу http://www.srcc.msu.su/num_anal).

2. Задачи и решения

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, где p — вещественное число.

Решение. Значение $\sqrt[p]{a}$ является корнем уравнения

$$f(x) \equiv x^p - a = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}.$$

Для $p = 2$ получим

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

2. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень $\bar{x}$ и для его вычисления используется метод простой итерации. Показать, что если $\varphi(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ на этом отрезке, то для любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню $\bar{x}$.

Решение. Поскольку $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, то

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}), \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

По теореме Лагранжа для каждого n существует такое ξ_n, $\xi_n \in [x_n, \bar{x}]$, что

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\xi_n).$$

Полученное соотношение называют *уравнением ошибки*. Последовательно применяя указанную теорему, получим

$$\begin{aligned} x_{n+1}-\bar{x}=(x_n-\bar{x})\,\varphi'(\xi_n) &= (x_{n-1}-\bar{x})\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1})= \ldots = \\ &= (x_0-\bar{x})\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1})\ldots\varphi'(\xi_0), \end{aligned}$$

где $\xi_{n-1}\in[x_{n-1},\bar{x}],\ldots,\xi_0\in[x_0,\bar{x}]$.

Поскольку $\big|\varphi'(\xi_i)\big|\le q$, $i=0,1,2,\ \ldots\ n$, то

$$|x_{n+1}-\bar{x}|\le q^{n+1}\,|x_0-\bar{x}|.$$

При $q<1$ правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x (тем самым, отображение $\varphi(x)$ является сжимающим).

Достаточное условие сходимости $q<1$ (достаточное условие сходимости метода простой итерации) часто называют *условием Липшица*, а константу q — *константой Липшица*.

В достаточной близости к корню характер сходимости метода простой итерации можно выразить через $\varphi'(\bar{x})$ с помощью разложения в ряд Тейлора следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1}-\bar{x} &= \varphi(x_n)-\varphi(\bar{x})=\varphi(\bar{x}+(x_n-\bar{x}))-\varphi(\bar{x})= \\ &= \varphi(\bar{x})+(x_n-\bar{x})\,\varphi'(\bar{x})+\frac{1}{2}\,(x_n-\bar{x})^2\,\varphi''(\xi)-\varphi(\bar{x})= \\ &= (x_n-\bar{x})\,\varphi'(\bar{x})+\frac{1}{2}\,(x_n-\bar{x})^2\,\varphi''(\xi), \quad \text{где}\ \ \xi\in[x_n,\bar{x}]. \end{aligned}$$

3. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения

$$f(x)=x^3+3x^2-1=0$$

методом простой итерации.

Решение. Табличным способом отделения корней выделим отрезки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-3,\,-2]$, $[-1,\,0]$, $[0,\,1]$, для каждого из которых построим свой итерационный процесс.

Так как на $[-3,\,-2]$ имеем $x^2\ne 0$, то исходное уравнение можно разделить на x^2. В результате получим равносильное уравнение

$$x=\varphi(x)\equiv\frac{1}{x^2}-3.$$

Итерационный процесс для нахождения первого корня:

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2}-3.$$

Сходимость имеет место для всех начальных приближений x_0 из этого отрезка, так как для $x \in [\,-3,\ -2\,]$ имеет место оценка

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left| -\frac{2}{x^3} \right| \le \frac{1}{4} < 1.$$

Для двух других отрезков уравнение представим в виде $x^2\,(\,x+3\,) - 1 = 0$. Так как для рассматриваемых отрезков $x+3 \ne 0$, то получаем два итерационных процесса

$$x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{x_n+3}}, \quad x_{n+1} = +\frac{1}{\sqrt{x_n+3}}.$$

Сходимость для этих отрезков следует из оценки:

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \right|^3 < 1.$$

4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a, b]$, причем $f(x)$ дифференцируема, а $f'(x)$ знакопостоянна на этом отрезке. Требуется построить равносильное уравнение вида $x = \varphi(x)$, для которого на $[a, b]$ выполнено достаточное условие $\big|\varphi'(x)\big| \le q < 1$ сходимости метода простой итерации.

Решение. Для определенности будем считать, что $f'(x) > 0$. Пусть

$$0 < m \le f'(x) \le M.$$

Заменим исходное уравнение равносильным:

$$x = \varphi(x) \equiv x - \lambda f(x), \quad \lambda > 0.$$

Подберем параметр λ так, чтобы на $[a, b]$ выполнялось неравенство:

$$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1.$$

Это неравенство будет заведомо выполнено, если будет выполнено условие

$$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda M \le 1 - \lambda m = q < 1.$$

При $\lambda = \dfrac{1}{M}$ мы получаем $q = 1 - \dfrac{m}{M} < 1$. Следовательно, при таком выборе λ достаточное условие сходимости метода простой итерации выполнено.

5. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{20}$$

сходится.

Решение. Иными словами, надо указать такое множество значений x_0, для которых данный итерационный процесс, представляющий собой метод простой итерации, сходится к корню уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv \frac{x^3 + 1}{20}.$$

В силу достаточного условия сходимости метода простой итерации, на искомой области должно выполняться неравенство $\left|\varphi'(x)\right| < 1$. Решая это неравенство, получим

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|\frac{3x^2}{20}\right| < 1, \quad |x| < 2\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 2.58\,.$$

Теперь рассмотрим те значения x_0, для которых следующее приближение x_1 попадает в полученный интервал, после чего итерационный процесс будет гарантированно сходиться. Такие x_0 удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{x^3+1}{20}\right| < 2\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Легко видеть, что интервал значений x_0, для которых рассматриваемый процесс сходится со второй итерации, шире интервала, полученного из достаточного условия сходимости. Обобщая данное наблюдение, получим, что область начальных приближений x_0, для которых этот процесс в конечном итоге сходится, определяется неравенством

$$\frac{x^3+1}{20} < x$$

для положительных x. Аналогичное расширение области сходимости имеется для отрицательных x.

Корнями заданного уравнения являются корни $x_1^* < 0$, $x_2^* > 0$ и $x_3^* > 0$ квадратного трехчлена

$$x^3 - 20x + 1 = 0.$$

Из геометрической интерпретации метода простой итерации для данного случая следует, что сходимость будет иметь место, если $x_0 \in [x_1^*, x_3^*]$. При $x_0 = x_1^*$ и $x_0 = x_3^*$ требуется лишь одна итерация, а при $x_0 \in (x_1^*, x_3^*)$ сходимость будет к корню x_2^* (следовательно, x_1^* и x_3^* — точки *отталкивания*, а точка x_2^* — точка *притяжения*).

Таким образом, область начальных приближений рассмотренного итерационного процесса имеет вид $x_0 \in [x_1^*, x_3^*]$.

6. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ простой корень, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

Решение. Метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Обозначим через $\bar{x}$ искомый корень. Тогда $\bar{x}$ будет также и корнем уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, мы можем рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \quad \text{и} \quad \varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Оценим теперь скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &= \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \varphi\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \varphi(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где} \ \ \xi \in [x_n, \bar{x}]. \end{aligned}$$

Следовательно, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

7. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

Решение. Поступая так же, как и в случае простого корня, получим

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где} \ \ \xi \in [x_n, \bar{x}].$$

Однако в случае $p > 1$ в выражении

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

содержится неопределенность “ноль на ноль”, так как $\bar{x}$ является также корнем уравнения $f'(x) = 0$. Оценим $\varphi'(x)$.

Функция $f(x)$ в окрестности корня $\bar{x}$ кратности p ведет себя приблизительно как $a\,(x - \bar{x})^p$, где a — константа. Тогда в малой окрестности корня

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx \frac{a\,(x-\bar{x})^p\, ap(p-1)\,(x-\bar{x})^{p-2}}{a^2 p^2\,(x-\bar{x})^{2p-2}} = \frac{p-1}{p} < 1.$$

Отсюда видно, что чем выше кратность корня, тем медленнее сходимость.

8. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ известной заранее кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

Решение. Требуемую модификацию будем искать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и подберем параметр α так, чтобы имела место квадратичная сходимость. Рассмотрим данную модификацию как специальный случай метода простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x)$, для которого выполнено $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, причем вблизи корня

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha + \alpha \frac{f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx 1 - \alpha + \alpha \frac{p-1}{p} = \frac{p-\alpha}{p}.$$

Для обеспечения квадратичной сходимости параметр α надо подобрать таким, чтобы $\varphi'(\bar{x}) = 0$, что и выполняется при $\alpha = p$.

9. Оценить скорость сходимости метода хорд.

Решение. Поступая так же, как и в задачах об определении скорости сходимости метода Ньютона, представим метод хорд как частный случай метода простой итерации:

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}\,(x - x_0).$$

Вблизи корня $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$ имеем

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x_n - \bar{x})^2\,\varphi''(\xi), \quad \xi \in [x_n, \bar{x}],$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi'(\bar{x}) &= 1 + \frac{f'(\bar{x})}{f(x_0)}\,(\bar{x} - x_0) = \\
&= \frac{f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(\bar{x} - x_0) + \dfrac{f''(\eta)}{2}(\bar{x} - x_0)^2 + f'(\bar{x})(\bar{x} - x_0)}{f(x_0)} = \\
&= \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{2}\,\frac{f''(\eta)}{f(x_0)}, \quad \eta \in [x_0, \bar{x}].
\end{aligned}$$

Если второе начальное приближение взять в такой окрестности корня, где выполняется условие $\big|\varphi'(\bar{x})\big| \le q < 1$, то метод хорд будет иметь линейную скорость сходимости.

10. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$, так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

Решение. Искомое число является корнем уравнения

$$\frac{1}{ax} - 1 = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = 2\,x_n - a\,x_n^2.$$

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = \dfrac{2}{a}$, то сходимости к корню не будет, так как все x_n равны 0. Если $x_0 < 0$, то сходимости также не будет, поскольку все x_n останутся отрицательными. Если взять $x_0 > \dfrac{2}{a}$, то все $x_n < 0$.

Таким образом, сходимость метода Ньютона для данного случая имеет место, если начальное приближение берется из интервала $(0, 2/a)$.

11. Пусть $\bar{x}$ — простой корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода секущих.

Решение. Преобразуем расчетную формулу метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n)$$

к виду

$$x_{n+1} - \bar{x} = x_n - \bar{x} - \frac{\big((x_n - \bar{x}) - (x_{n-1} - \bar{x})\big) f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big)}{f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - f\big(\bar{x} + (x_{n-1} - \bar{x})\big)}.$$

Разложим $f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big)$ и $f\big(\bar{x} + (x_{n-1} - \bar{x})\big)$ в ряды Тейлора в точке $\bar{x}$ и подставим в последнюю формулу, учитывая, что $f(\bar{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \bar{x} &= x_n - \bar{x} - \frac{(x_n - \bar{x}) f'(\bar{x}) + 0.5 (x_n - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \cdots}{f'(\bar{x}) + 0.5\big((x_n - \bar{x}) + (x_{n-1} - \bar{x})\big) f''(\bar{x}) + \cdots} = \\
&= (x_n - \bar{x}) \left(1 - \frac{1 + 0.5 (x_n - \bar{x})^2 \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \cdots}{1 + 0.5 (x_n - \bar{x}) \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + 0.5 (x_{n-1} - \bar{x}) \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \cdots} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (x_n - \bar{x})\, (x_{n-1} - \bar{x})\, \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + O\big((x_n - \bar{x})^2\big).
\end{aligned}$$

Опустив члены более высокого порядка малости, получаем уравнение ошибки

$$x_{n+1} - \bar{x} = C\, (x_n - \bar{x})\, (x_{n-1} - \bar{x}), \quad C = \frac{1}{2} \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,.$$

Скорость сходимости определяется соотношением

$$x_{n+1} - \bar{x} = A\, (x_n - \bar{x})^m,$$

в котором значения A и m пока неизвестны. Тогда

$$x_n - \bar{x} = A\, (x_{n-1} - \bar{x})^m,$$

откуда

$$x_{n-1} - \bar{x} = A^{-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1/m}.$$

Подставим эти соотношения в уравнение ошибки:

$$A (x_{n-1} - \bar{x})^m = C\, (x_n - \bar{x})\, A^{-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1/m},$$

$$(x_{n-1} - \bar{x})^m = C\, A^{-1-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1+1/m}.$$

Приравнивая эти два полинома, получим два уравнения с двумя неизвестными

$$m = 1 + \frac{1}{m},$$
$$1 = C\, A^{-(1+1/m)}.$$

Из первого уравнения находим показатель скорости сходимости метода секущих

$$m = 0.5\,(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618.$$

Константа асимптотической ошибки

$$A = \left(\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

12. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости и предложить способ численной оценки величины кратности корня.

Решение. Для уравнения

$$g(x) \equiv \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

корень $\bar{x}$ будет простым. Тогда для уравнения $g(x) = 0$ метод Ньютона примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\big(f'(x_n)\big)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

и будет иметь квадратичный порядок сходимости.

В окрестности $\bar{x}$ функция $f(x) \approx a\,(x - \bar{x})^p$. Тогда

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \approx \frac{a\,(x - \bar{x})^p}{ap\,(x - \bar{x})^{p-1}} = \frac{1}{p}\,(x - \bar{x}).$$

Для двух последовательных приближений x_1 и x_2 имеем систему приближенных уравнений

$$g(x_1) \approx \frac{1}{p}\,(x_1 - \bar{x}),$$
$$g(x_2) \approx \frac{1}{p}\,(x_2 - \bar{x}).$$

Отсюда получим оценку для кратности p корня $\bar{x}$:

$$p \approx \frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)}.$$

Такой способ оценивания p можно применять на каждой итерации.

13. Пусть для решения уравнения $x^3 - x = 0$ применяется метод Ньютона. При каких начальных приближениях x_0 имеет место сходимость и к какому корню?

Решение. Заданное уравнение имеет корни $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = 0$ и $\bar{x}_3 = 1$, а метод Ньютона для его решения имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{3x_n^2 - 1}.$$

Применим геометрическую интерпретацию метода Ньютона для данного случая. Если начальное приближение x_0 таково, что $3x_0^2 - 1 = 0$, т.е. $x_0 = \pm 1/\sqrt{3}$, то формальной сходимости нет (метод не определен). При $x_0 < -1/\sqrt{3}$ метод сходится к корню $\bar{x}_1 = -1$, а при $x_0 > 1/\sqrt{3}$ — к корню $\bar{x}_3 = 1$.

Теперь найдем x_0, при котором первая же итерация попадет в корень $\bar{x}_3 = 1$. Такое начальное приближение является одним из корней уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = 1 \quad \text{или} \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Его корни $x_{1,2} = 1$ и $x_3 = -1/2$, откуда искомое начальное приближение есть $x_0 = -1/2$. Из симметрии задачи следует, что при $x_0 = 1/2$ первая же итерация попадет в корень исходного уравнения $\bar{x}_1 = -1$.

Начальное приближение x_0, при котором первая же итерация попадет в точку $x = 1/\sqrt{3}$, есть соответствующий корень уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично ищется ачальное приближение x_0, при котором первая же итерация попадет в точку $x = -1/\sqrt{3}$.

Найдем точку зацикливания метода из уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = -x \quad \text{или} \quad 5x^2 = 1.$$

Следовательно, при $x_0 = \pm 1/\sqrt{5}$ метод зацикливается.

Можно найти такие x_0, при которых имеет место попадание в точки $\pm 1/\sqrt{3}$, не с первой, а со второй, третьей и т.д. итераций. Для этого можно предложить следующее решение задачи.

Обозначим области сходимости метода Ньютона

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \equiv \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

к корням $\bar{x} = -1, 0, +1$ через X_-, X_0, X_+ соответственно. Кроме того, определим последовательности точек $\{x_n^\pm\}$ для $n \geq 0$ следующими условиями

$$\varphi(x_{n+1}^\pm) = x_n^\pm, \quad x_0^\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

для элементов которых справедливы неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = x_0^- < x_1^+ < x_2^- < \cdots < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0 < \frac{1}{\sqrt{5}} < \cdots < x_2^+ < x_1^- < x_0^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k}^- = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^+ = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k}^+ = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^- = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$X_- = (-\infty, x_0^-) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[(x_{2k-1}^+, x_{2k}^-) \cup \left(x_{2k-1}^-, x_{2(k-1)}^+ \right) \right],$$

$$X_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right),$$

$$X_+ = (x_0^+, \infty) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2(k-1)}^-, x_{2k-1}^+ \right) \cup (x_{2k}^+, x_{2k-1}^-) \right].$$

Кроме того, если $x_0 = x_n^\pm$, $n \geq 0$, то метод не определен, а при $x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ — зацикливается.

14. Определить скорость сходимости метода бисекций.

Решение. Если за искомое приближение $\bar{x}^*$ к корню $\bar{x}$ на итерации с номером n взять середину текущего отрезка, т.е. взять $\bar{x}^* = (b_n - a_n)/2$, то

$$|\bar{x}^* - \bar{x}| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, сходимость метода бисекций линейная, при этом последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню со скоростью геометрической прогрессии с знаменателем $1/2$.

15. Построить итерационный процесс для решения уравнения

$$ax + b = 0, \quad 0 < a < 1$$

без использования операции деления.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду

$$ax + b = 0 \equiv (a - 1)x + x + b = 0.$$

Отсюда получим равносильное уравнение

$$x = \varphi(x) = (1 - a)x - b.$$

В силу достаточного условия сходимости метода простой итерации сходимость имеет место для любого начального приближения x_0, поскольку $\varphi'(x) = 1 - a < 1$.

Заметим, что построенный итерационный процесс заменяет операцию деления двух чисел на последовательность операций умножения и сложения (вычитания).

В действительности сходимость имеет место и для $0 < a < 2$, поскольку для этих значений параметра a выполнено достаточное условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$.

16. Показать, что для любого начального приближения $x_0 > 0$ итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a \geq 1$$

для вычисления $\sqrt{a}$ обладает монотонной односторонней сходимостью, такой, что

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq \sqrt{a}.$$

Оценить скорость сходимости.

Решение. Поскольку $x_n > 0$ (см. расчетную формулу) при всех n, то

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0, \qquad (*)$$

откуда следует, что начиная с $n = 1$ выполнено $x_n \geq \sqrt{a} \geq 1$. Так как

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) \geq 0,$$

то последовательность $\{x_n\}$ является монотонно убывающей начиная с $n = 1$.

Если $x_0 \geq 1$, то из $(*)$ следует, что для всех n выполнено неравенство

$$x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2,$$

т.е. имеет место квадратичная скорость сходимости начиная с первой итерации. Если $x_0 < 1$, то начиная с $n = 1$ все равно будет выполнено $x_n \geq \sqrt{a} \geq 1$; следовательно, квадратичная скорость сходимости имеет место начиная со второй итерации.

17. Пусть дана функция $\varphi(x) = \alpha\sin^2 x + \beta\cos^2 x + \gamma$. При каких ограничениях на α, β и γ метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится при любом начальном приближении.

Решение. Будем искать требуемые ограничения из достаточного признака сходимость $|\varphi'(x)| < 1$:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &= |2\alpha\sin x\cos x - 2\beta\sin x\cos x| = |\alpha\sin 2x - \beta\sin 2x| = \\ &= |\alpha - \beta||\sin 2x| \leq |\alpha - \beta| \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сходимость при любом начальном приближении имеет место при $|\alpha - \beta| < 1$ и любом γ.

18. Пусть дана функция $\varphi(x) = ae^{-bx^2} + c$, $a \neq 0$, $b \geq 0$. При каких ограничениях на a, b и c метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится при любом начальном приближении.

Решение. Будем искать требуемые ограничения из достаточного признака сходимость $|\varphi'(x)| < 1$:

$$|\varphi'(x)| = \left|-2abxe^{-bx^2}\right| < 1.$$

Найдем x, при котором левая часть этого неравенства достигает максимума. В точках максимума должно выполнятся равенство

$$e^{-bx^2} - 2x^2be^{-bx^2} = 0,$$

откуда $x = \pm 1/\sqrt{2b}$. Сходимость имеет место, если в этих точках будет выполнено неравенство

$$\left|2abe^{-b(1/2b)}/\sqrt{2b}\right| = \left|a\sqrt{2b}e^{-1/2}\right| < 1.$$

Следовательно, сходимость при любом начальном приближении имеет место при $|a\sqrt{2b}| < \sqrt{e}$ и любом c.

19. Построить метод простой итерации для решения уравнения

$$2 + x = e^x, \quad x > 0.$$

Решение. Метод простой итерации

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = e^{x_n} - 2$$

применять нельзя, поскольку при всех $x > 0$ не выполнено достаточное условие сходимости:

$$\varphi'(x) = e^x > 1.$$

Применим стандартный прием перехода к обратной функции (в данном случае логарифмируем исходное уравнение):

$$x = \varphi(x) = \ln(2 + x),$$

для которого итерационный процесс

$$x_{n+1} = \ln(2 + x_n)$$

сходится, поскольку

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2 + x} < 1 \quad \text{при} \quad x > 0.$$

20. Вывести апостериорную оценку погрешности метода простой итерации.

Решение. В задаче 2 выведена *априорная* оценка погрешности метода простой итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$:

$$|x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - \bar{x}| \leq \ldots \leq q^n|x_0 - \bar{x}|,$$

где q берется из неравенства $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Эта оценка неконструктивна, поскольку точное значение корня $\bar{x}$, как правило, не известно заранее. Поэтому на практике применяют *апостериорную* оценку погрешности

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|,$$

которая получается из неравенств

$$|x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - \bar{x}| = q|x_{n-1} - x_n + x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \bar{x}|.$$

21. Оценить скорость сходимости метода простой итерации для уравнения

$$x = \varphi(x) = 1 - \sin x.$$

Пусть в это уравнение введен параметр $\lambda \neq 0$ следующим образом:

$$x + \lambda x = \lambda x + 1 - \sin x.$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$x = \varphi(x) = \frac{\lambda x + 1 - \sin x}{1 + \lambda}.$$

Подобрать для преобразованного уравнения такое значение параметра λ, чтобы сходимость метода простой итерации была как можно более быстрой.

Решение. Рассмотрим сначала итерационный процесс для исходного уравнения:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = 1 - \sin x_n.$$

Из задачи 2 с точностью до второго порядка малости имеем

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \approx |\varphi'(\bar{x})||x_n - \bar{x}| = |\cos\bar{x}||x_n - \bar{x}|,$$

где $\bar{x}$ — точное значение корня. Его можно оценить графически как точку пересечения графиков функций

$$y_1 = 1 - x, \quad y_2 = \sin x.$$

Из этой оценки следует, что $0 < \bar{x} < 1$. Тогда воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\sin x$ и удержим первый член: $\sin x \sim x$. Подставив эту оценку в исходное уравнение, получим $\bar{x} \sim 1/2$. Следовательно, скорость сходимости рассматриваемого метода оценивается так:

$$q = |\varphi'(\bar{x})| = |\cos\bar{x}| \sim \cos 0.5 \sim 0.87,$$

т.е. имеет место сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, примерно равным 0.87.

Теперь обратимся к выбору параметра λ. Из задач 2 и 6 следует, что сходимость будет наиболее быстрой, если параметр λ выбран таким, что $\varphi'(\bar{x}) = 0$. Для нашего случая значение λ получается из следующего уравнения:

$$\varphi'(\bar{x}) = \frac{\lambda - \cos\bar{x}}{1+\lambda} = 0, \quad \lambda = \cos\bar{x}.$$

Пользуясь приближенной оценкой для $\bar{x}$, получаем $\lambda \approx \cos 0.5$. При этом значении λ скорость сходимости близка к квадратичной.

22. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ простой корень $\bar{x}$, причем $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Рассмотрим метод Ньютона и обозначим ошибку на итерации с номером n через $\varepsilon_n = x_n - \bar{x}$. Вывести *уравнение ошибки* для метода Ньютона (т.е. рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет ε_n).

Решение. Метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Обозначим через $\bar{x}$ искомый корень. Тогда $\bar{x}$ будет также и корнем уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, мы можем рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \quad \text{и} \quad \varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Оценим теперь скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} =& \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \varphi\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \varphi(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(x_n - \bar{x})^3 \varphi'''(\xi) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(x_n - \bar{x})^3 \varphi'''(\xi), \quad \text{где} \;\; \xi \in [x_n,\, \bar{x}]. \end{aligned}$$

Отбрасывая в этом равенстве член более высокого порядка малости и вычислив значение $\varphi''(\bar{x})$, получим искомое уравнение ошибки:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2.$$

Следовательно, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

Теперь получим уравнение ошибки другим, более громоздким способом, но полезным в некоторых других случаях.

Разложим $f(\bar{x}+\varepsilon_n)$ и $f'(\bar{x}+\varepsilon_n)$ в ряды Тейлора, заменив в формуле метода Ньютона x_n на $x_n = \bar{x}+\varepsilon_n$:

$$f(\bar{x}+\varepsilon_n) = f(\bar{x}) + \varepsilon_n f'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right),$$
$$f'(\bar{x}+\varepsilon_n) = f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Вычтем $\bar{x}$ из левой и правой частей формулы метода Ньютона и представим ее в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n f'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)}{f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)} = \\
&= \varepsilon_n - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \frac{O\left(\varepsilon_n^3\right)}{f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).
\end{aligned}$$

Здесь использовано правило деления многочлена на многочлен. Отбрасывая члены более высокого порядка малости, чем ε_n^2, получим выведенное ранее уравнение ошибки для метода Ньютона.

23. Пусть в уравнении $x = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$ и $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, где $\bar{x}$ — корень этого уравнения. Подобрать такую функцию $\Phi(x)$, чтобы уравнение $x = \Phi(x)$ имело бы тот же корень $\bar{x}$ и метод простой итерации $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ имел бы квадратичную скорость сходимости в окрестности корня $\bar{x}$.

Решение. Поскольку $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$, из задачи 2 следует, что итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ имеет линейную скорость сходимости. Тем самым задача сводится к ускорению сходимости путем замены исходного уравнения другим уравнением $x = \Phi(x)$, в котором

— $x = \Phi(x)$ имеет тот же корень и

— для $\Phi'(x)$ выполнено условие $\Phi'(\bar{x}) = 0$.

Построим $\Phi(x)$ следующим образом. Рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(x) - x$. Тогда исходное уравнение $x = \varphi(x)$ запишется как $f(x) = 0$. Будем искать $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = x + a(x)f(x).$$

При таком выборе $\Phi(x)$ уравнение $x = \Phi(x)$ имеет корень $\bar{x}$, так как

$$\Phi(\bar{x}) = \bar{x} + a(\bar{x})f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Теперь выберем $a(x)$ так, чтобы при $f(x) = 0$ выполнялось равенство $\Phi'(x) = 0$:

$$\Phi'(x) = 1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x) = 1 + a(x)f'(x), \quad a(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

При таком выборе $a(x)$ имеем $\Phi'(\bar{x}) = 0$, поскольку $f(\bar{x}) = 0$. Таким образом, мы построили функцию

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{\varphi'(x) - 1},$$

такую, что для уравнения $x = \varphi(x)$ итерационный процесс

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = \frac{x_n\varphi'(x_n) - \varphi(x_n)}{\varphi'(x_n) - 1}$$

имеет второй порядок сходимости в окрестности корня $\bar{x}$ (см. также задачу 6).

24. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n^2 - 2x_n + 2$$

сходится.

Решение. Корнями уравнения $x = \varphi(x) = x^2 - 2x + 2$ являются $\bar{x}_1 = 1$ и $\bar{x}_2 = 2$.

При $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$ все последующие итерации равны 2, а при $x_0 = 1$ — равны 1.

При $x_0 < 0$ и $x_0 > 2$ легко видеть, что $x_n \to \infty$, когда $n \to \infty$ (т.е. процесс расходится).

При $1 < x_0 < 2$ имеем $x_n \to 1$, поскольку для любого x из этого интервала выполнено неравенство $x^2 - 2x + 2 < x$.

При $0 < x_0 < 1$ первая же итерация x_1 попадает в интервал $(1, 2)$, поскольку для любого $0 < x < 1$ выполнено неравенство $x^2 - 2x + 2 < 2$; следовательно, и в этом случае имеем $x_n \to 1$.

Таким образом, область сходимости рассматриваемого итерационного процесса есть отрезок $[0, 2]$; корень $\bar{x}_2 = 2$ — точка отталкивания, а корень $\bar{x}_1 = 1$ — точка притяжения.

Если использовать достаточный признак сходимости $|\varphi'(x)| = |2x - 2| < 1$, то получим интервал сходимости $1/2 < x_0 < 3/2$, что не дает полного решения задачи.

Поскольку $\varphi'(\bar{x}_1) = 2\bar{x}_1 - 2 = 0$, то в окрестности этого корня имеет место квадратичная скорость сходимости.

Для решения задачи удобно использовать геометрическую интерпретацию метода простой итерации.

25. Дано уравнение

$$x = \varphi(x) = \frac{\pi}{2}\sin x,$$

которое решается методом простой итерации $x_n = \varphi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

Решение. Корнями уравнения являются $\bar{x}_1 = -\pi/2$, $\bar{x}_2 = 0$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$.

При $x_0 = -\pi/2$ и $x_0 = \pi/2$ все последующие итерации равны $\pi/2$, а при $x_0 = 0$ — равны 0.

На интервалах $(-\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{\pi}{2}\sin x\right| > x;$$

поэтому при начальных приближениях x_0, принадлежащих этим интервалам, имеет место сходимость соответственно к $\bar{x}_1 = -\pi/2$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$.

Если x_0 взять вне этих интервалов, то первая же итерация либо приведет в точку 0, либо в один из этих интервалов; корни $\bar{x}_1 = -\pi/2$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$ — точки притяжения, а корень $\bar{x}_2 = 0$ — точка отталкивания.

Заметим, что достаточный признак сходимости дает более узкую область сходимости:

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{\pi}{2}\cos x\right| < 1.$$

Поскольку $\varphi'(\bar{x}_1) = \varphi'(\bar{x}_3) = 0$, то в окрестностях этих корней имеет место квадратичная скорость сходимости.

Для решения задачи удобно использовать геометрическую интерпретацию метода простой итерации.

26. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Решение. Имеем

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2 = 0.$$

Поскольку $\bar{x} = 2$ — простой корень, то в его окрестности сходимость квадратичная (см. задачу 6). Корень $\bar{x} = 1$ имеет кратность, равную 2; следовательно, в его окрестности имеет место линейная сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$ (см. задачу 7).

27. Для вычисления $x = \sqrt{2}$ используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n + \nu\left(x^2 - 2\right).$$

При каком выборе ν этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

Решение. Задача будет решена, если выбор ν приведет к тому, что будет выполнено $\varphi'(\sqrt{2}) = 0$. Последнее будет иметь место, если определить ν из уравнения

$$\varphi'(x) = 1 + \nu 2x = 0, \quad \nu = -\frac{1}{2x}.$$

Легко видеть, что при таком выборе ν исходный процесс превращается в метод Ньютона для вычисления $\sqrt{2}$.

28. Построить метод простой итерации для решения уравнения

$$\cos x - \frac{1}{x}\sin x = 0,$$

сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

Решение. Эквивалентное уравнение имеет вид

$$x = \operatorname{tg} x.$$

Метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \operatorname{tg} x_n$ для его решения применить нельзя, поскольку нарушено достаточное условие сходимости:

$$\varphi'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1.$$

Перейдем к обратной функции и получим другое эквивалентное уравнение

$$x = \operatorname{arctg} x,$$

для которого метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \operatorname{arctg} x_n$ сходится в силу достаточного признака, поскольку

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} < 1, \quad x \neq 0.$$

29. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ неизвестной заранее кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

Решение. Поскольку уравнение $f'(x) = 0$ имеет тот же корень $\bar{x}$, но кратности $p-1$, то для уравнения

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

корень $\bar{x}$ будет уже простым. Применив к этому уравнению метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

и подставив сюда выражение $g(x)$ через $f(x)$, получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

который имеет квадратичную скорость сходимости.

30. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ кратности $p \geq 2$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Для

метода секущих в случае простого корня скорость сходимости определяется соотношением

$$x_{n+1} - \bar{x} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)^{1/m} (x_n - \bar{x})^m,$$

где $m \approx 1.618$ (см. задачу 11). Однако в данном случае в константе асимптотической ошибки содержится неопределенность "нуль на нуль", если $p > 2$, или деление на нуль, если $p = 2$. Модифицировать метод секущих так, чтобы скорость сходимости сохранилась.

Решение. Поскольку уравнение $f'(x) = 0$ имеет тот же корень $\bar{x}$, но кратности $p-1$, то для уравнения

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

корень $\bar{x}$ будет уже простым. Применив к этому уравнению метод секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}g(x_n) - x_n g(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

и подставив сюда выражение $g(x)$ через $f(x)$, получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n)f'(x_{n-1}) - x_n f(x_{n-1})f'(x_n))}{f(x_n)f'(x_{n-1}) - f(x_{n-1})f'(x_n))}$$

с тем же порядком сходимости, что и для случая простого корня.

31. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ простой корень $\bar{x}$, причем $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_1\omega_1(x_n) - \alpha_2\omega_2(x_n),$$

где

$$\omega_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \omega_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n + \beta\omega_1(x_n))}, \quad \beta \neq 0.$$

Найти такие значения α_1 и α_2, чтобы при любом $\beta \neq 0$ этот процесс имел третий порядок сходимости.

Решение. Положим $\varepsilon_n = x_n - \bar{x}$ и представим $x_n = \bar{x} + \varepsilon_n$. Тогда (см. задачу 22)

$$\omega_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(\bar{x} + \varepsilon_n)}{f'(\bar{x} + \varepsilon_n)} = \varepsilon_n - \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}\omega_2(x_n) \quad &= \quad \frac{f(x_n)}{f'(x_n + \beta\omega_1(x_n))} = \frac{f(\bar{x} + \varepsilon_n)}{f'(\bar{x} + \varepsilon_n + \beta\omega_1(\bar{x} + \varepsilon_n))} = \\ &= \quad \varepsilon_n + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}(1 - 2(1 + \beta))\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).\end{aligned}$$

Теперь вычтем $\bar{x}$ из обеих частей формулы рассматриваемого итерационного процесса и подставим выписанные разложения. Тогда получим следующее уравнение ошибки:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - (\alpha_1 + \alpha_2)\,\varepsilon_n - (\alpha_1 + \alpha_2(1+2\beta))\,\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Для того чтобы этот процесс имел третий порядок сходимости, необходимо подобрать такие α_1 и α_2, что коэффициенты при ε_n и ε_n^2 были равны нулю:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\\
&\alpha_1 + \alpha_2(1-\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\alpha_1 = \frac{1+2\beta}{2\beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2\beta}.$$

Литература

1. *Арушанян И.О., Чижонков Е.В.* Материалы семинарских занятий по курсу “Методы вычислений” / под ред. Арушаняна О.Б. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

2. *Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Численные методы решения задач и упражнения. М.: Дрофа, 2009.

3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

5. Библиотека НИВЦ МГУ решения типовых задач численного анализа (http://num-anal.srcc.msu.ru/).

6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.

7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

8. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.

9. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. М.: Наука, 1977.